

Zestaw I

Zadanie 1.

Dane są liczby $a = (\log_9 2) \cdot (\log_2 \sqrt{3})$ i $b = \frac{\log_3 5}{\log_3 16}$. Oblicz a^b .

Zadanie 2.

Dana jest funkcja $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ dla $x \in \mathbb{R}_+$. Udowodnij, że funkcja $f(x)$ przyjmuje tylko wartości nie mniejsze od 3.

Zadanie 3.

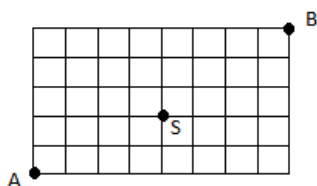
Rozwiąż równanie $\cos 3x + 2\cos x = 0$ w zbiorze $\langle 0, \pi \rangle$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4.

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma dwóch początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 6, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 8. Wyznacz wszystkie wartości n , dla których spełniona jest nierówność $|S - S_n| < 0,01$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

Zadanie 5.

W pewnym mieście jest prostopadły układ ulic. Schemat ulic przedstawiono poniżej. Jan znajduje się w punkcie A i chce dojechać najkrótszą drogą do punktu B nie przejeżdżając przez skrzyżowanie znajdujące się w punkcie S. Oblicz, ile jest najkrótszych dróg z A do B nie przechodzących przez punkt S.



Zadanie 6.

Wiemy, że liczba $x \neq 0$ spełnia warunek $x + \frac{1}{x} = 6$. Oblicz wartość wyrażenia $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Zadanie 7.

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{p+2p+3p+\dots+np}{3n^2+1}$ dla $n \geq 1$. Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których granica ciągu jest równa 4.

Zadanie 8.

Dane są liczby $a = \log 5$ i $b = \log 3$. Wyraż $\log_{30} 8$ za pomocą liczb a i b . Zapisz obliczenia.

Zadanie 9.

Dane jest równanie $\sqrt{3}\sin x = 1 - \cos x$. Rozwiąż równanie dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 10.

Rzucamy 6 razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najwyżej w dwóch rzutach uzyskasz liczbę oczek podzielną przez 3. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11.

Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Wyznacz ostrosłup o najmniejszym polu powierzchni bocznej. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.

Liczby a i b spełniają warunki $2^a = 9$ i $3^b = 5$. Udowodnij, że $ab = \log_2 25$.